



TITLE:

砂山形成過程における頂点移動の ダイナミクス (複雑流体の構造形成 と崩壊の数理)

AUTHOR(S):

占部, 千由

CITATION:

占部, 千由. 砂山形成過程における頂点移動のダイナミクス (複雑流体の構造形成と崩壊の数理). 数理解析研究所講究録 2005, 1413: 70-74

ISSUE DATE:

2005-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/26202>

RIGHT:

砂山形成過程における頂点移動のダイナミクス

京都大学・人間・環境学研究科 占部 千由 (Chiyori Urabe)
Graduate School of Human and Environmental,
Kyoto University

概要

頂点は砂山形成過程で雪崩により激しく振動しつづけ、頂点の位置は雪崩と堆積を関係づける重要な量である。本研究では時間間隔 T で 1 粒子ずつ供給しつづけ砂山を形成する場合についてシミュレーションを用いて頂点位置の運動を測定した。時間間隔 T が小さいときには頂点位置の時系列のパワースペクトルは $1/f$ 的になり、 T が大きいときパワースペクトルは Lorentzian 的になることがわかった。パワースペクトルが $1/f$ 的になるときについては砂山斜面上の雪崩の方向の切り替わりの時系列のパワースペクトルと頂点のパワースペクトルが似た傾向を示す。このとき、雪崩の切り替わりの時系列の待ち時間分布の巾の指数 γ とパワースペクトルの巾の指数 α に $\alpha = -\gamma - 3$ という関係があり、シミュレーションの結果から雪崩の切り替わりの待ち時間分布が指数 -2 の巾の関数で近似できることより、パワースペクトルが $1/f$ 的になることがわかった。

1 始めに

粉体の状態は大きく分けて固体状態、流動状態、ガス状態の 3 種類あり、本研究では固体層と雪崩による流動層が共存する砂山に着目する。砂山の雪崩や砂山の形状の実験は数多く行われているが [1] [2] [3] [4] [5] [6]、砂山の頂点の運動についての研究はなされていない。

砂山における雪崩、砂山の形状などはそれぞれ独立に研究がなされているが、砂山の頂点の移動はこれらの現象を互いに関連づけるものの一つと考える。頂点の位置と砂山の縁の形によって砂山のおおよその斜面の方向が得られるため、粒子が供給される位置が固定されていれば、新たに供給された粒子が堆積する斜面の方向が決まり、堆積によって必ず雪崩が起きるため、頂点の位置がおおよその雪崩の方向を決めていると言える。また、頂点位置は雪崩と堆積による砂山形状の変化に従って動かされたため、砂山形成過程において頂点と雪崩と堆積は互いに密接な関係にある。

砂山へ 1 点から 1 粒子ずつ供給するとき、粒子の供給の時間間隔 T によって、頂点位置の時系列のパワースペクトルが $1/f$ 的である場合と Lorentzian 的である場合があることがシミュレーションの結果により見いだされた。頂点のパワースペクトルが $1/f$ 的になるときに雪崩の方向の切り替わりの時系列のパワースペクトルを計算すると頂点位置

のパワースペクトルと巾の指数が等しく、雪崩の切り替わりのパワースペクトルが $1/f$ 的になることが原因で頂点のパワースペクトルが $1/f$ 的になると考えられる。また、雪崩の切り替わりの時系列の待ち時間分布が巾的になり、巾の指数が近似的に -2 になることからパワースペクトルが $1/f$ 的になることが説明される。

2 問題設定

本研究では 2 次元の離散要素法 (DEM) を用いて円盤状の多粒子からなる砂山の頂点位置を測定する。DEM では粒子間に法線方向の力として弾性力と粘性、接線方向の力として弾性力と粘性とクーロン摩擦を考える。ここでは重力加速度を g とし、法線方向のバネ定数 $k_n = 1.0 \times 10^4$ 、粘性係数 $\eta_n = 2.0 \times 10^2$ とし、接線方向のバネ定数 $k_t = 2.0 \times 10^3$ 、粘性係数 $\eta_t = 0.0$ 、摩擦係数 $\mu = 0.5$ とする。粒径は d を最大粒径として $0.8d$ から d の間で一様分布させる。このとき跳ね返り係数はほぼ 0.2 となる。

図 1 のように最大直径 d を持つ 80 粒子を敷き詰め床を作り、床を覆う適当な砂山を形成し、初期条件とする。雪崩によって流され床の端を越え落た粒子は考えないため、測定中の砂山の大きさはほとんど変化しない。初期条件として与えられた砂山に 1 粒子ずつ時間間隔 T で落して砂山を形成しつつながら測定を行う。粒子を供給する位置は図 1 のように床の中心の真上で砂山の頂点から鉛直距離 H の位置から粒子を放し自由落下させる。砂山頂点からの鉛直距離を固定するのは砂山に与える衝撃を一定にするためである。本研究では T と H を変化させ、頂点の位置を測定する。頂点位置を砂山を構成する粒子の中でもっとも高い位置にある粒子の重心として定義し、時刻 t での頂点位置の水平成分 $x_{top}(t)$ を測定する。

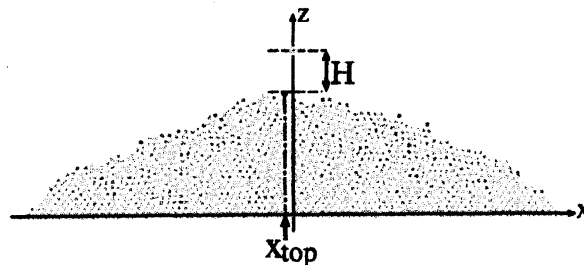


図 1: 砂山のスナップショット

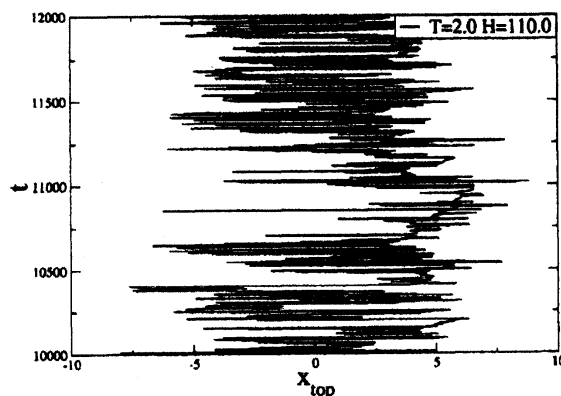


図 2: 横軸 $x_{top}(t)$ 、縦軸 時刻 t 。 $x_{top}(t) = 0$ は時刻 t で頂点の位置が床の中心の真上にあることを意味する。

3 結果

$x_{top}(t)$ を $2\sqrt{d/g} \leq T \leq 80\sqrt{d/g}$, $20d \leq H \leq 110d$ の範囲で測定した。 $T = 2\sqrt{d/g}$, $H = 110d$ のときの $x_{top}(t)$ を図 2 に示す。図 2 は 1000 粒子が供給される間

($1000T$) のプロットであり、 $x_{top}(t)$ は幅 $20d$ にわたって振動している。 $x_{top}(t)$ の振幅は H が大きいときに振幅はやや広がる傾向にある。

$x_{top}(t)$ の時系列のパワースペクトル $S(f)$ は図3のように波数 f の広範囲にわたって直線でフィットでき、 $H = 110d$ で $T = 2\sqrt{d/g}$ のときパワースペクトルは $1/f$ 的で、 $T = 80\sqrt{d/g}$ のときパワースペクトルの巾の指数は近似的に -2 になり Lorentzian 的であることがわかった。

いくつかの T について同様にパワースペクトル $S(f)$ を指数 α の巾でフィットし、 T と巾の指数 α の関係を調べると、図4のように $T \leq 10\sqrt{d/g}$ で急激に -1 に近づき、逆に T が大きくなるとゆっくり -2 に近づく傾向が見られた。

これは粒子の供給の時間間隔 T が大きいときは頂点の時系列に何らかの特徴的時間が存在するが、 T が小さくなるにつれて系の特徴的時間が消えていく過程を示している。また、 H を変化させ α を測定すると、このような劇的な変化は生じなかった。

頂点 $x_{top}(t)$ の時系列のパワースペクトル $S(f)$ の巾の指数 α が $\alpha \cong -1$ のときと $\alpha \cong -2$ のときで砂山の斜面の状態にも変化が現れる。 T が小さく $\alpha \cong -1$ のときには雪崩が止まる前に次々に粒子が供給され、雪崩は発生しやすく継続しやすいことから、砂山斜面の流動化状態が保たれやすい。逆に $\alpha \cong -2$ のときには T が大きいいため、ひとつの雪崩が終わってから次の粒子が供給され、砂山斜面は固体的に振る舞い、雪崩の発生の仕方でも砂山の表面から数層の部分に断層ができ崩落することから始まることが多い。

2次元の砂山では雪崩の起きる斜面は左

右2方向に限定されるが、両方の斜面で同時に雪崩が発生することは少なく、頂点の位置が粒子を供給する位置の左右どちらにあるかで、新しく供給される粒子がどちらの斜面に堆積するかが決まり、雪崩が発生する斜面も決まるため、頂点の位置の移動と左右斜面の雪崩の切り替わりには密接な関係がある。 $\alpha \cong -1$ のときの砂山の左右の雪崩の切り替わりの時系列 $K(t)$ を運動エネルギーを用いて測定し、パワースペクトル $S_k(f)$ を計算すると、図5のように $S_k(f)$ の傾きと頂点の時系列 $x_{top}(t)$ のパワースペクトル $S(f)$ の

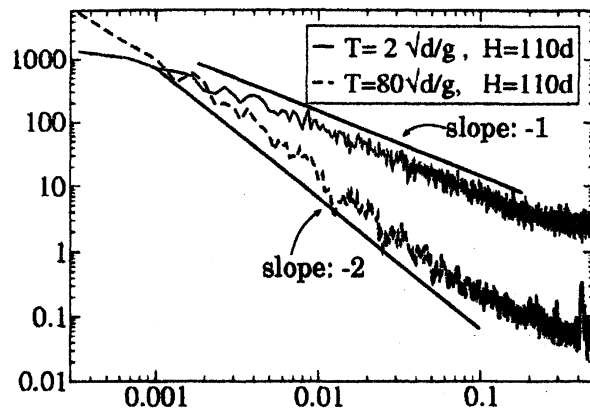


図3: $x_{top}(t)$ のパワースペクトル。傾き -1 と -2 の直線を参考のため付け加えた。

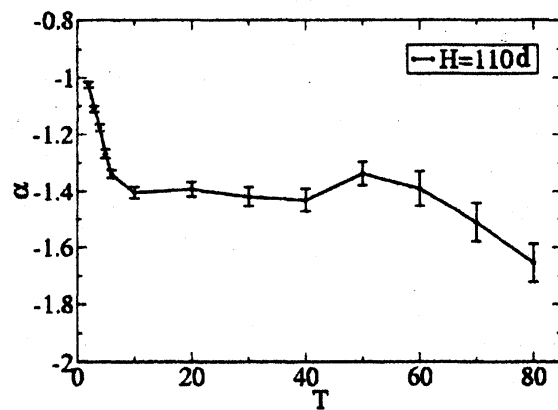


図4: $H = 110d$ のときの T と $x_{top}(t)$ のパワースペクトル $S(f) \sim f^\alpha$ の巾の指数 α

傾きが等しくなる。頂点 $x_{top}(t)$ と雪崩の切り替わり $K(t)$ の時系列が同じ特徴を示すことから、切り替わりの時系列のパワースペクトル $S_k(f)$ が $1/f$ 的であることが原因で頂点の時系列のパワースペクトル $S(f)$ が $1/f$ 的になると考えられる。

雪崩の左右の斜面での切り替わり $K(t)$ は、砂山の右半分・左半分にある粒子の運動エネルギーの和をそれぞれ $K_r(t)$, $K_l(t)$ とし、 $K_r(t)$ と $K_l(t)$ から $K(t)$ を以下のように定義した。

$$K(t) = \begin{cases} +1 & (K_l(t) > K_r(t) \text{ のとき}) \\ -1 & (\text{他}) \end{cases}$$

$K(t) = +1, -1$ は時刻 t で左斜面の雪崩あるいは右斜面の雪崩が起きていることを意味する。

解析的計算により、 $K(t)$ のような2値化された時系列の待ち時間分布が指数 γ の巾関数であるとき、時系列のパワースペクトルの巾の指数は $-\gamma - 3$ となることが知られており [7]、 $K(t)$ の待ち時間分布は図6のように巾の指数は -2 に近いいため $K(t)$ のパワースペクトルが $1/f$ 的になる。

4 まとめ

2次元のDEMを用いて砂山の頂点の位置 $x_{top}(t)$ の時系列を測定した。砂山へ1粒子ずつ時間間隔 T で供給し続けるとすると、頂点の位置 $x_{top}(t)$ の時系列のパワースペクトル $S(f)$ は T が小さいとき $S(f) \sim 1/f$ となり、 T が大きいとき $S(f)$ は Lorentzian 的に振る舞うことがわかった。頂点移動のパワースペクトル $S(f)$ が $1/f$ 的になるとき左右の斜面の雪崩の切り替わりの時系列 $K(t)$ のパワースペクトル

$S_k(f)$ と $S(f)$ は傾きが等しくなり、雪崩と頂点移動には密接な関係があることから雪崩の切り替わりのパワースペクトル $S_k(f)$ が $1/f$ 的になることによって、頂点位置のパワースペクトル $S(f)$ も $1/f$ 的になると考えられる。雪崩の切り替わりの待ち時間分布が指数が -2 に近い巾になることがシミュレーションの結果から得られ、雪崩の切り替わりの時系列 $K(t)$ のような2値化された時系列の待ち時間分布の巾の指数が γ のとき時系列のパ

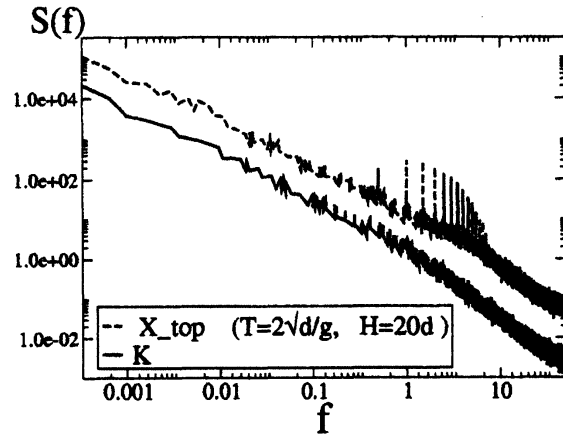


図 5: $T = 2\sqrt{d/g}$, $H = 20d$ での $x_{top}(t)$ と $K(t)$ のパワースペクトル。

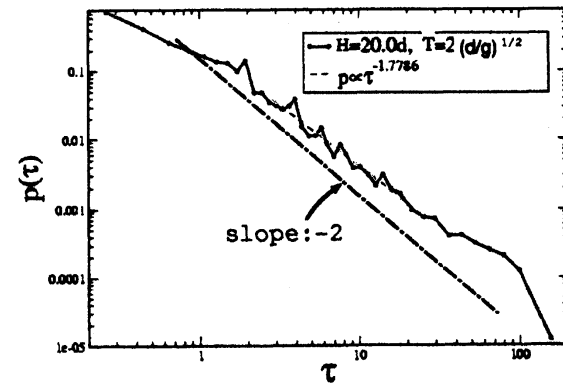


図 6: $T = 2\sqrt{d/g}$, $H = 20d$ での $K(t)$ の待ち時間分布

ワースペクトルの巾の指数が $-\gamma-3$ となることが解析的に知られていることから、待ち時間分布の巾の指数が -2 に近いためにパワースペクトルが $1/f$ 的になると説明できる。

但し、今のところ待ち時間分布が巾的になる理由と巾の指数が -2 になる理由について判明しておらず、今後の課題である。

参考文献

- [1] V. Frette, K. Christensen, A. Målthe-Sørenssen, J. Feder, T. Jøssang, and P. Meakin. Avalanche dynamics in a pile of rice. *Nature*, Vol. 379, p. 49, 1996.
- [2] A. Daerr and S. Douady. Two types of avalanche behaviour in granular media. *Nature*, Vol. 399, p. 241, 1999.
- [3] P. M. Gleiser, S. A. Cannas, F. A. Tamarit, and B. Zheng. Long-range effects in granular avalanching. *Phys. Rev. E*, Vol. 63, p. 042301, 2001.
- [4] J. J. Alonso and H. J. Herrmann. Shape of the tail of a two-dimensional sandpile. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 76, p. 4911, 1996.
- [5] Y. Grasselli, H. J. Herrmann, G. Oron, and S. Zapperi. Effect of impact energy on the shape of granular heaps. *Granular Matter*, Vol. 2, p. 97, 2000.
- [6] Y. Grasselli and H. J. Herrmann. Crater formation on a three dimensional granular heap. *Granular Matter*, Vol. 3, p. 201, 2001.
- [7] M. C. Teich S. B. Lowen. Fractal renewal processes generate $1/f$ noise. *Phys. Rev. E*, Vol. 47, p. 992, 1993.